

II414) L'élasticité de *substitution factorielle* (ou sigma : σ)

On traite ci-dessous :

- 1-Origine et signification du concept σ
- 2- La formule de σ , et les différents cas possibles
- 3- Trois applications (3a, 3b, 3c)

1- Origine et signification du concept σ

Dans les années 1930 la question de la neutralité (ou non neutralité) du *progrès technique*, a généré un intense débat économique dans lequel se sont illustrés : Mrs Joan Robinson, J. Hicks, et N. Kaldor. Il s'agissait plus précisément de savoir si le progrès technique modifie la répartition du revenu entre les deux facteurs de production, le capital (K) et le travail (L), dans l'hypothèse de la concurrence pure et parfaite. La réponse ne pouvant être apportée qu'au moyen d'une mesure de la facilité (ou de la difficulté) de remplacement du travail par le capital.

L'élasticité de substitution factorielle, concept mathématique introduit par Hicks-Robinson, est cette mesure. En appelant w , le prix du travail (ou salaire) et r , le prix du capital (ou intérêt), l'élasticité de substitution factorielle est une mesure de la substitution du travail par le capital, lorsque varie le rapport (w/r), c'est-à-dire le prix relatif des facteurs de production.

Ce concept est de nature macroéconomique, et vaut pour la fonction de production globale, dénommée « *fonction de production néo-classique* » de la forme $Q = f(K; L)$). Toutefois, la décroissance du TMST, constatée dans la théorie microéconomique du producteur, est la traduction du phénomène dit de substitution entre facteurs (K et L), ou factorielle. Elle signifie que la *technique de production*, ou « *intensité capitaliste* » (ou rapport capital/travail), se modifie et avec elle les quantités de facteurs utilisées.

Ce changement peut être estimé à l'aide de σ , l'élasticité de substitution factorielle ainsi que l'a proposé J. Hicks.

2- La formule de σ , et les différents cas possibles

a) Enoncé littéraire de la formule de définition

- Le calcul de σ met en relation la variation relative du $TMST_{K/L}$, et le rapport entre les quantités de facteurs optimales (K^*/L^* , notées ci-dessous K/L).
- Il s'agit de mesurer, pour un même niveau de production $Q = Q^0$ (donc le long d'un isoquant), la variation en pourcentage de la quantité de facteurs employés, due à une variation en pourcentage donnée du $TMST_{K/L}$ (ou, ce qui revient au même, de leur prix relatif w/r).

Soit : si (w/r) ou le $TMST_{KL}$ varie de $t\%$, quelle sera la variation en pourcentage de (K/L) ?

b) La méthode de calcul de σ

Suivant l'énoncé en a) on doit calculer le rapport définissant l'élasticité de substitution factorielle

$\frac{\frac{\frac{dK}{dL}}{K}}{\frac{L}{TMST}}$	Variation du rapport capital/travail
Variation du TMST	

ou de préférence, son inverse, soit :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{d(TMST)}{TMST} \cdot \frac{\frac{K}{L}}{\frac{dK}{dL}}$$

Or le diviseur du second membre (dK/dL) n'est autre que la dérivée de la fonction générale des isoquants, donc le TMST. Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{d(TMST)}{TMST} \cdot \frac{\frac{K}{L}}{TMST}$$

La méthode de calcul pratique consiste donc, partant de la fonction de production à deux facteurs K et L,

- 1- A calculer d'abord le $TMST_{K/L}$
- 2- Puis l'inverse de l'élasticité ($1/\sigma$)
- 3- Pour en déduire la valeur de l'élasticité (σ).

c) Interprétation de σ : les différents cas possibles

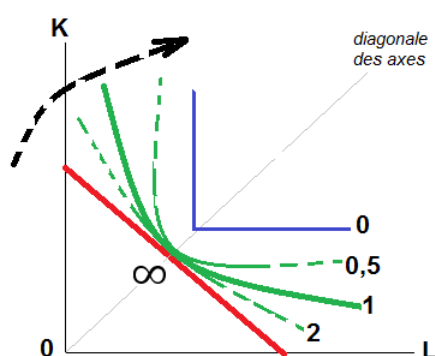
L'élasticité est dite **ponctuelle**, car elle varie en chaque point de l'isoquant, sauf dans le cas de fonctions de production particulières, comme le montre le tableau ci-dessous :

Substituabilité parfaite	Cas général	Cas Cobb Douglas	Cas CES	Non substituabilité Cas Leontief
$\sigma = \infty$	$0 < \sigma < \infty$	$\sigma = 1$	$\sigma = \text{constante}$	$\sigma = 0$

Remarques :

- Une valeur négative de σ traduit la *concavité* des *isoquants*
- Le cas CES tend sous certaines conditions vers le cas Cobb Douglas.
- De gauche à droite du tableau, on passe de la substituabilité parfaite (à gauche) à la non substituabilité (à droite). Ou, plus la courbe est « *plate* », plus la substituabilité est « *forte* » (en rouge), et à l'inverse plus elle est « *coudée* », plus la substituabilité est « *faible* ». Ce qui est traduit par la représentation graphique des différents cas ci-dessous :

Valeur de l'élasticité de substitution factorielle : σ
les différents cas



NB :

L'équerre (en bleu) correspond au cas d'une fonction de production à facteurs *complémentaires* (voir plus bas, application 3c). La valeur nulle de l'élasticité de substitution, signifie qu'une variation de $t\%$ du prix du facteur capital (K), oblige le producteur situé à l'optimum (le long de la diagonale), s'il désire maintenir ce niveau de production, à subir une hausse de coût égale à $(t\% \cdot r \cdot K)$.

3) Application

3a)

Soit la fonction de production à deux facteurs $Q = f(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$

où K= capital et L= travail. Les paramètres $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ et $\beta = 1 - \alpha$

Travail demandé : calculer la valeur de l'élasticité de substitution factorielle, et interpréter le résultat.

Réponse :

On reconnaît dans la forme de la fonction une Cobb Douglas, dont on sait qu'elle possède une élasticité de substitution factorielle égale à 1.

C'est ce qu'il faut démontrer, en appliquant la formule

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{d(TMST)}{TMST} \cdot \frac{K}{L}$$

1) Calcul du $TMST_{K/L}$

Partant de la fonction de production Q, le TMST est égal au rapport des productivités marginales, c'est-à-dire au rapport des dérivées partielles premières.

$$\text{La productivité marginale du travail } \frac{\partial Q}{\partial L} = A\beta K L^{\beta-1}$$

$$\text{La productivité marginale du capital } \frac{\partial Q}{\partial K} = A L^{\beta} \alpha K^{\alpha-1}$$

Le $TMST_{K/L}$

$$= \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{A\beta K L^{\beta-1}}{A L^{\beta} \alpha K^{\alpha-1}}$$

2) Calcul de $(1/\sigma)$

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{d(TMST)}{TMST} \cdot \frac{K}{L}$$

Le premier membre est la dérivée du TMST dont la variable est le rapport (K/L).

Elle est égale après simplification à $\frac{\beta}{\alpha}$ puisque la simplification donne

$$TMST = \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{L}$$

Dans le second membre demeure le numérateur (K/L), tandis que le TMST est recopié au dénominateur.

D'où :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\frac{K}{L}}{\frac{\beta K}{\alpha L}} = 1 \text{ d'où l'on déduit la valeur demandée de}$$

l'élasticité de substitution factorielle $\sigma = 1$

L'interprétation consiste à faire remarquer :

- que la fonction de production est donc une fonction de type Cobb Douglas, à élasticité de substitution constante et égale à 1.
- Par conséquent, une variation à la baisse du prix (r) du capital K, entraîne une variation proportionnelle, à la baisse, des quantités utilisées de travail L. Ou plus généralement une variation de $t\%$ du rapport des prix relatifs (r/w) entraîne une variation de $t\%$ de la structure productive (K/L) pour produire la même quantité $Q = Q^*$.

3b)

Soit la fonction de production de la forme :

$$Q = A[(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-1/\rho}], \text{ où } A > 0 ; 0 < \delta < 1 ; \delta \neq 0 \text{ et } > -1$$

Questions :

- De quel type de fonction s'agit-il ?
- Cette fonction est-elle homogène ?
- Calculer la productivité marginale de chaque facteur K et L. Sont-elles homogènes, de quel degré, et pourquoi ?
- Déterminer la pente des isoquants, et conclure sur la convexité de celle-ci.
- Déterminer le rapport capital/travail optimal (K^*/L^*) sachant w , le prix du travail, et i le prix du capital.
- Calculer l'élasticité de substitution factorielle.

1- La fonction

Il s'agit d'une fonction de production CES. Elle est définie par :

(K,L) : les facteurs de production

A : un paramètre d'efficience (constant, ou variable selon l'échelle de la production)

δ : un paramètre de distribution

ρ : un paramètre de substitution

2- L'homogénéité

La fonction CES est une fonction homogène de degrés $k = 1$. Elle est *donc linéairement homogène*.

Puisque :

$$A[(\delta(\lambda K)^{-\rho} + (1-\delta)(\lambda L)^{-\rho})^{-1/\rho}] = A(\lambda^{-\rho}[(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-1/\rho}]) = (\lambda^{-\rho})^{-1/\rho}(Q) = \lambda^1 Q$$

Cette propriété entraîne les conséquences suivantes :

- ses fonctions de *productivité moyenne et marginale* sont *homogènes de degrés (k-1)*, et donc ici 0 (à vérifier ci-dessous).
- elle vérifie l'identité d'Euler (donc *la règle de l'épuisement du produit*).

3- Les fonctions de productivité marginale des facteurs et leur homogénéité

a. La productivité marginale du facteur *travail* (L)

Ci-dessous $A(.)$ désigne le crochet de la fonction CES : $A[(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})]$

Elle est donnée par : $\frac{\partial Q}{\partial L} = A\left(\frac{-1}{\rho}\right)(.)^{(-1/\rho)-1} (1-\delta)(-\rho)L^{-\rho-1}$ (dérivation partielle de $y=ax^n$)

$$= (1-\delta)A(.)^{- (1+\rho)/\rho} L^{-(1+\rho)} \text{ (mise en facteur, et exposants de A réduits au même dénominateur)}$$

$$= (1-\delta) \frac{A^{(1+\rho)}}{A^\rho} (.)^{- (1+\rho)/\rho} L^{-(1+\rho)} \text{ (dissociation du produit } A(.) \text{ et application des puissances)}$$

On remplace enfin la partie de l'expression correspondant à la fonction, soit Q , tout en réalisant les opérations dues aux exposants (notamment l'exposant $^{- (1+\rho)/\rho}$ devient $^{(1+\rho)}$) :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{(1-\delta)}{A^\rho} \frac{Q}{L^{(1+\rho)}} > 0$$

b. La productivité marginale du facteur *capital* (K)

On trouve de même :

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{(1-\delta)}{A^\rho} \frac{Q}{K^{(1+\rho)}} > 0$$

On peut vérifier que la propriété d'*homogénéité* $k=0$ est vérifiée pour ces deux fonctions de *productivité marginale*.

4- Pente des isoquants et convexité

Les isoquants ou courbes d'isoproduit sont de la forme $K = f(L, Q^*)$.

Par définition leur pente est l'opposé du TMST_{K/L} et peut donc s'écrire à l'aide des deux formules de celui-ci :

$$\frac{\partial K}{\partial L} = - \left[\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \right] = - \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) \left(\frac{K}{L} \right)^{(1+\rho)} < 0 \text{ l'isoquant est décroissant, et de plus } \frac{\partial^2 K}{\partial L^2} > 0$$

donc il est strictement convexe.

5- le rapport capital/travail optimal (K^*/L^*) sachant w , le prix du travail, et i le prix du capital.

Les demandes optimales de facteur (K^*/L^*), sont donnée par l'égalité vérifiée à l'optimum :

TMST_{K/L} = rapport des prix des facteurs, soit :

$$TMST_{K/L} = \left[\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \right] = \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) \left(\frac{K}{L} \right)^{(1+\rho)} = \frac{w}{i} = \text{rapport des prix des facteurs}$$

Soit $\left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) \left(\frac{K}{L} \right)^{(1+\rho)} = \frac{w}{i}$ alors $\frac{K^*}{L^*} = \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{1/(1+\rho)} \left(\frac{w}{i} \right)^{1/(1+\rho)}$

Si $\left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{1/(1+\rho)} = \Gamma$ alors $\frac{K^*}{L^*} = \Gamma \left(\frac{w}{i} \right)^{1/(1+\rho)}$ est le rapport capital/travail à l'optimum.

6- L'élasticité de substitution factorielle (σ) de la fonction CES

On détermine son expression partant du rapport capital/travail $\frac{K^*}{L^*} = \Gamma \left(\frac{w}{i} \right)^{1/(1+\rho)}$ lequel permet de calculer les demandes marginales et moyennes de facteur.

La demande marginale est la dérivée du rapport, soit : $\frac{d\left(\frac{K^*}{L^*}\right)}{d\left(\frac{w}{i}\right)} = \left(\frac{\Gamma}{(1+\rho)} \right) \left(\frac{w}{i} \right)^{1/(1+\rho)-1}$

La demande moyenne s'écrit $\frac{\left(\frac{K^*}{L^*}\right)}{\left(\frac{w}{i}\right)} = \Gamma \left(\frac{w}{i} \right)^{1/(1+\rho)-1}$ (en divisant le rapport de chaque côté par $\left(\frac{w}{i}\right)$)

L'élasticité de substitution factorielle (σ) est alors le rapport de la demande marginale sur la demande moyenne de facteurs.

Ce rapport a pour résultat : $\sigma = \frac{1}{(1+\rho)}$ la valeur de sigma dépend de ρ

- Si $-1 < \rho < 0$ alors $\sigma > 1$

- Si $\rho = 0$ alors $\sigma = 1$

- Si $0 < \rho < \infty$ alors $\sigma < 1$

Donc l'élasticité de substitution factorielle d'une fonction CES est constante mais non nécessairement égale à 1. Dans ce dernier cas, la fonction devient une Cobb-Douglas.

3c)

Soit la fonction de production $Q = \min (1/6 w ; 1 \text{ capital})$

- 1- De quel type de fonction s'agit-il ?
- 2- Représenter graphiquement les isoquants correspondantes
- 3- Quelle est alors la valeur de l'élasticité de substitution factorielle ?

1- La fonction de production à technologie fixe ou de Leontief

$Q = \min (1/6 \text{ travail} ; 1 \text{ capital})$ est une fonction du type $Q = f(L, K)$ dans la quelle la proportion des facteurs est fixe (ou « appropriée » à l'entreprise) comme par exemple $(1/6 ; 1)$.

Elle décrit le niveau de production possible compte tenu des pondérations, quels que soient les niveaux initiaux de $K = K^0$, et $L = L^0$. C'est-à-dire :

$$Q(\text{possible}) = \min (L^0 \times (1/6) ; K^0 \times 1)$$

2- La forme particulière des isoquants

Une fonction de production à technologie fixe possède des isoquants représentées en équerre. L'exemple du rapport $(1/6 ; 1)$ conduit à la représentation ci-dessous :

Les niveaux de production successifs ($Q_2^* > Q_1^* > Q_0^*$) doivent vérifier la proportionnalité $(1/6 ; 1)$. Il n'existe donc qu'un optimum possible, illustré pour Q_0^* par le point (A).

Le calcul de cet optimum sur l'isoquant Q^*_0 est :

$$Q^*_0 = \min [(1/6)6 ; (1)1] = \min(1 ; 1) = 1$$

Les points hypothétiques B et C illustrent le phénomène du dépassement (de la proportion), lequel conduit à une productivité marginale des facteurs nulle. Ce qui est constatée si par exemple $K=2,5$ ou $L=8$.



3- L'élasticité de substitution factorielle

Les niveaux de production successifs ($Q^*_2 > Q^*_1 > Q^*_0$) doivent vérifier la proportionnalité (1/6 ; 1). Il ne peut donc exister qu'un seul optimum au point A, correspondant à un niveau donné de production.

Par conséquent, la productivité marginale des facteurs étant nulle, l'élasticité de substitution factorielle σ l'est également, soit : $\sigma = 0$. Ce résultat traduit la complémentarité des facteurs.